№ 8. 1 Ноября 1886 г. **I Сем.**



ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

—и—

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

Выходитъ 3 раза въ мѣсяцъ, по 12 №№ въ учебный семестръ.

Адр. Ред.: Кіевъ, Нижне-Владимірская, д. № 19.

Цѣна: 3 руб. въ учебный семестръ, или 6 руб. въ годъ.

Солнце.

Н. А. Конопацкаго.

2. Солнечные пятна и свѣточи.

(Продолженіе) [1].

На основаніи вышеприведенныхъ выводовъ изъ весьма большого числа наблюденій солнечныхъ пятенъ, разсматривая ихъ какъ результаты дѣйствій тѣхъ-же физико-химическихъ силъ, съ которыми мы знакомы здѣсь на землѣ, были предложены слѣдующія гипотезы для объясненія причины возникновенія и строенія пятенъ.

1) Пятна суть тучи, плавающія на извѣстной высотѣ въ солнечной атмосферѣ и частію закрывающія отъ насъ свѣтъ солнца.

2) Пятна суть воронкообразныя впадины въ солнечной фотосферѣ, наполненныя сгущенными и сравнительно охлажденными парами.

3) Пятна суть мѣста, въ которыхъ вслѣдствіе чрезвычайно высокой температуры вырывающіеся изнутри солнца газы разрѣжаютъ пары фотосферы.

[1]) См. № 5 „Вѣстника“.

Первая изъ этихъ гипотезъ была первоначально предложена Галилеемъ, впослѣдствіи (около 1862 г.) она вошла въ составъ знаменитой гипотезы Кирхгофа о строеніи солнца, основанной на спектральныхъ изслѣдованіяхъ. Въ настоящее время она имѣетъ еще сторонниковъ, но большинство астрономовъ, наблюдавшихъ солнечныя пятна, болѣе склонны принимать таковыя за дѣйствительныя впадины въ фотосферѣ, а не за плавающія въ ней на подобіе облаковъ нашей атмосферы скопленія охлажденныхъ паровъ [1]).

Остается поэтому сдѣлать выборъ между двумя послѣдними гипотезами, т. е. принять одно изъ двухъ предположеній: или масса пятна холоднѣе, либо теплѣе окружающей фотосферы.

Секки принимаетъ послѣднее и даетъ пятнамъ слѣдующее объясненіе.

Пятна происходятъ вслѣдствіе какихъ-то сильныхъ переворотовъ внутри солнца, которые взрываютъ свѣтящуюся его поверхность, т. е. фотосферу; отъ этого получаются болѣе или менѣе правильныя впадины, въ которыя со всѣхъ сторонъ устремляются фотосферическія массы. Эти взрывы происходятъ часто внезапно и распространяются на большія протяженія, и равновѣсіе возстановляется лишь постепенно. Равновѣсіе нерѣдко нарушается отъ времени до времени на одномъ и томъ-же мѣстѣ, и такимъ образомъ движеніе поддерживается послѣдовательными толчками и накопляется. Эта внутренняя дѣятельность солнца обнаруживается поднятіемъ или взрывомъ фотосферическихъ массъ въ видѣ свѣточей, движеніе которыхъ подобно движенію паровъ въ прозрачной средѣ.

Если изнутри солнца подъ громаднымъ давленіемъ вырывается на поверхность масса паровъ, то она должна разрѣдиться и вслѣдствіе того охладиться. Затѣмъ вслѣдствіе такого охлажденія происходитъ снова сгущеніе пара и образуется разрѣженное пространство, всасывающее окружа-

---

[1]) *Прим. ред.* По поводу настоящей статьи Г. Конопацкаго о солнечныхъ пятнахъ (начало которой было помѣщено въ № 5 „Вѣстника“) намъ былъ сдѣланъ упрекъ относительно высказаннаго въ ней положенія о „несомнѣнности“ воронкообразной формы пятенъ. Замѣчаніе это мы принимаемъ съ благодарностью, ибо въ вопросахъ такого рода, гдѣ такъ рѣзко расходятся даже мнѣнія спеціалистовъ, посвятившихъ десятки лѣтъ наблюденіямъ надъ солнечными пятнами, нельзя еще въ наше время утверждать категорически, что пятна на солнцѣ образованы такъ, а не иначе. Тѣмъ не менѣе мы считаемъ своею обязанностью замѣтить, что помѣщаемая нами статья учителя Конопацкаго представляетъ собою лишь извлеченіе (кромѣ 1-й главы) изъ сочиненія Секки о солнцѣ (котораго, въ русскомъ переводѣ пока не имѣется). Секки-же, какъ извѣстно, вовсе не сомнѣвался въ томъ, что пятна суть углубленія, и его книга наполнена рисунками, иллюстрирующими это очень наглядно.

ющія массы, и такимъ образомъ произойдетъ стремленіе окружающихъ массъ въ видѣ потоковъ къ центру изверженія. Лучистый видъ полутѣни находитъ здѣсь себѣ объясненіе. Но за разрѣженіемъ пара и уменьшеніемъ давленія не всегда должно слѣдовать сгущеніе его въ облака и жидкіе и твердые осадки, а можетъ произойти только уменьшеніе прозрачности, такъ что хотя внутренность пятна холоднѣе ниже лежащихъ слоевъ, изъ которыхъ произошло поднятіе паровъ его составляющихъ, но все-же имѣетъ высшую температуру чѣмъ окружающая фотосфера.

Въ такомъ случаѣ массы фотосферы устремляются въ отверстіе пятна и, вступая въ пространство, имѣющее высшую температуру, разрѣжаются и теряютъ свѣтъ, обращаясь въ газы; онѣ дѣлаются невидимыми и пятно остается темнымъ, несмотря на притокъ свѣтящейся массы. Темный слой газообразныхъ металловъ, наполняя впадину пятна, поглощаетъ большую часть свѣта ниже лежащихъ слоевъ фотосферы, и вслѣдствіе того пятно остается относительно темнымъ.

Если, напротивъ, внутренность пятна холоднѣе окружающей фотосферы, то послѣдняя, проникая въ него, немедленно охлаждается, теряетъ блескъ и свѣтъ и такимъ образомъ представится тоже темною.

Хотя послѣднее предположеніе на первый взглядъ кажется естественнѣе и проще, однако при ближайшемъ разсмотрѣніи оно представляетъ нѣкоторыя трудности. Именно едва-ли можно предположить, что значительно холоднѣйшія области могутъ оставаться продолжительное время, иногда цѣлые мѣсяцы на поверхности солнца, несмотря на притокъ болѣе горячихъ массъ изнутри [1]).

Итакъ средина пятна, несмотря на сравнительно темный видъ, горячѣе окружающей фотосферы. Температура эта, по самой умѣренной оцѣнкѣ, должна въ нѣсколько разъ превышать температуру гремучаго газа, и всѣ металлы при такой температурѣ должны быть въ парообразномъ состояніи. Столь высокая температура солнца не позволяетъ и внутри его, подъ доступной нашему наблюденію фотосферой, допустить существованіе твердаго ядра и даже жидкое состояніе дѣлается немыслимымъ.

Правда, вмѣстѣ съ глубиною должно значительно возрастать и давленіе, и если съ увеличеніемъ давленія въ глубинѣ солнца должно измѣниться газообразное состояніе вещества, то оно должно перейти въ то осо-

[1]) Это возраженіе не выдерживаетъ критики: если могутъ быть по мнѣнію Секки причины, поддерживающія болѣе высокую температуру пятна иногда въ теченіе мѣсяцевъ, то точно также могутъ быть и обратныя условія, при которыхъ продолжительное существованіе пятна съ низшей температурой было бы одинаково возможнымъ. *Прим. ред.*

бое молекулярное состояніе, которое свойственно тѣламъ при такъ называемой *критической* температурѣ и давленіи [2]).

Сторонники гипотезы твердаго ядра солнца видѣли въ движеніи пятенъ къ полюсамъ явленіе аналогичное пассатамъ, и въ этомъ сравненіи можно было бы признать справедливость, еслибъ оно согласовалось съ наблюденіями.

Въ этомъ случаѣ существенная разница состояла бы уже въ различіи причины аналогичныхъ явленій на землѣ и солнцѣ, ибо нѣтъ внѣ солнца источника тепла, который-бы своимъ нагрѣваніемъ производилъ потоки отъ экватора къ полюсамъ; впрочемъ, какъ увидимъ впослѣдствіи, температура на экваторѣ солнца дѣйствительно выше чѣмъ на полюсахъ.

Но для указанной аналогіи кромѣ того необходимо еще, чтобы скорость пятенъ въ направленіи вращенія на экваторѣ было менѣе чѣмъ въ высшихъ широтахъ; потому что пятно, передвигаясь отъ экватора къ полюсу съ потокомъ солнечной атмосферы, переходитъ въ мѣста, имѣющія меньшую линейную скорость, и слѣдовательно должно опережать ихъ, совершая въ высшихъ широтахъ оборотъ въ меньшее время; въ свою очередь пятно, переходящее отъ полюса къ экватору съ обратнымъ потокомъ, должно отставать отъ вращенія точекъ экватора и, слѣдовательно, на экваторѣ пятна должны имѣть меньшую скорость вращенія. Между тѣмъ наблюденія указываютъ совершенно противоположное: скоросъ вращенія пятенъ на экваторѣ болѣе скорости вращенія въ высшихъ широтахъ.

Объяснимъ теперь причину усиленнаго движенія пятенъ въ направленіи вращенія при ихъ возникновеніи или возобновленіи. Прежде всего уму представляется предположеніе, что вращеніе массъ внутри солнца быстрѣе вращенія ихъ на поверхности, и эта мысль не представляетъ ничего страннаго въ виду массы такихъ громадныхъ размѣровъ. Таковъ именно и долженъ быть законъ вращенія туманности, находящейся въ состояніи постепеннаго сгущенія, и подтвержденіе его мы видимъ въ томъ фактѣ, что нижнія планеты совершаютъ обращеніе гораздо скорѣе верхнихъ.

Охлажденные лучеиспусканіемъ и сгущенные наружные слои солнца по законамъ равновѣсія падаютъ къ центру солнца; взамѣнъ ихъ внут-

---

[2]) Если допустить, что вслѣдствіе необыкновенно высокой температуры нѣкоторыя изъ веществъ, находящихся на поверхности солнца, какъ напр. различные металлы, достигаютъ своей критической температуры и переходятъ черезъ нее, то отсюда съ большою вѣроятностью вытекаетъ предположеніе, что образованіе солнечныхъ пятенъ можетъ сопровождаться *переходомъ этихъ тѣлъ черезъ критическое состояніе при охлажденіи*. т. е явленіемъ такъ называемой *критической мути*. *Прим. ред.*

ренніія болѣе легкія и горячія массы газа, поднимаясь къ поверхности, имѣютъ бо́льшую скорость вращенія, а потому опережаютъ общее движеніе массъ на поверхности, что и обнаруживается для наблюдателя нѣкоторымъ усиленіемъ движенія, какъ бы скачкомъ впередъ въ направленіи вращенія, который замѣчается при возникновеніи пятна, а также при подновленіи его притокомъ новыхъ массъ изнутри солнца.

Болѣе яркій блескъ и бурное поднятіе выступовъ на экваторѣ, а также прямыя термометрическія измѣренія доказываютъ, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, что на экваторѣ температура выше чѣмъ на полюсахъ. Отсюда необходимо предположить существованіе теченій отъ полюсовъ къ экватору; но очевидно, что эти теченія не могутъ направляться по меридіанамъ, но подобно тому какъ на землѣ должны, переходя въ низшія широты, постепенно отставать отъ вращенія солнца, слѣдовательно должны имѣть направленіе противоположное вращенію. Такимъ образомъ пятно, имѣющее на экваторѣ большую скорость вращенія, передвигаясь къ полюсу, должно встрѣчать сопротивленіе общей массы фостоферы, которая течетъ отъ полюса къ экватору на нѣкоторой глубинѣ. Это должно произвести два явленія, которыя на самомъ дѣлѣ и наблюдаются: во 1-хъ скорость вращенія пятна съ переходомъ въ высшія широты должна уменьшаться; во 2-хъ, фотосферическія массы съ передней стороны пятна должны вздыматься сжатыми волнами, а сзади растянутыми, что и наблюдается дѣйствительно въ формѣ свѣточей. Массы пятна поднимаютъ ударяющіяся на нихъ массы фотосферы и производятъ пониженіе ея сзади, подобно сваямъ посреди быстраго потока. Такимъ-же образомъ объясняется дѣленіе пятна на части, образованіе хвоста за пятномъ и такъ называемыхъ мостовъ, представляющихъ не что иное какъ потоки фотосферы, съ силою врывающіеся внутрь пятна.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Примѣчаніе редакціи. Впослѣдствіи, когда изъ дальнѣйшихъ главъ настоящей статьи г. Конопацкаго, читатели познакомятся съ явленіемъ протуберансовъ и съ приложеніемъ спектральнаго анализа къ солнцу, мы въ видѣ дополненія къ излагаемымъ здѣсь взглядамъ Секки изложимъ вкратцѣ и другія гипотезы какъ о строеніи солнца вообще, такъ и о происхожденіи пятенъ. Въ настоящее время отмѣтимъ только, что вышеприведенное

предположеніе итальянскаго астронома о болѣе высокой температурѣ внутри пятна не согласно ни съ гипотезой Кирхгофа, по которой образованіе пятна обусловливается поднятіемъ металлическихъ паровъ въ области меньшаго давленія, послѣдствіемъ чего является расширеніе, охлажденіе и образованіе осадковъ, ни съ гипотезой Файя, который объясняетъ образованіе пятенъ возникновеніемъ въ верхнихъ слояхъ солнечной атмосферы вихревыхъ движеній и проникновеніемъ внутрь образованныхъ такими вихрями воронокъ болѣе холоднаго водорода, присутствіе котораго на поверхности солнца можно считать доказаннымъ. Вопросъ о существованіи въ атмосферѣ солнца токовъ отъ полюсовъ къ экватору и обратно, которыми Секки, а также и другіе астрономы, какъ Цельнеръ и Шпереръ, старались объяснить различную скорость вращенія и перемѣщеніе пятенъ, тоже является вопросомъ спорнымъ. Съ достовѣрностью извѣстно лишь то, что солнце вращается вокругъ своей оси не какъ одно цѣлое, и для каждой зоны его поверхности время полнаго оборота иное, въ зависимости отъ геліоцентрической широты. Французскій астрономъ Фай вывелъ даже эмпирическую формулу, выражающую эту зависимость [1]) и изъ многочисленныхъ и тщательныхъ наблюденій Каррингтона, Шперера и др. пришелъ къ заключенію, что и для одной и той же зоны скорость вращенія не постоянна, измѣняясь изъ года въ годъ. Совокупность всѣхъ этихъ фактовъ привела его къ допущенію образованія вихревыхъ движеній (вслѣдствіе различія скоростей) въ верхнихъ слояхъ, чѣмъ, какъ мы сказали, обусловливаются по его мнѣнію образованіе пятенъ, къ отрицанію экваторо-полярныхъ токовъ и къ предположенію существованія вертикальныхъ токовъ, восходящихъ изнутри солнца, которое по гипотезѣ Фая состоитъ изъ газообразнаго ядра.

Недавно астрономомъ Делоне была предложена еще новая гипотеза солнечныхъ пятенъ; она существенно отличается отъ гипотезы Фая въ томъ смыслѣ, что по мнѣнію Делоне вихри образуются не въ верхнихъ, а въ нижнихъ слояхъ газовъ, лежащихъ надъ раскаленнымъ огнежидкимъ ядромъ солнца, и такъ какъ такіе вихри должны имѣть восходящее движеніе, то въ мѣстахъ ихъ образованія давленіе значительно уменьшается (подобно тому, какъ и при образованіи нашихъ земныхъ циклоновъ) и поглощенные огнежидкою массою газы, въ особенности водородъ, выдѣляются въ этихъ мѣстахъ съ большею или меньшею стремительностью и своимъ поднятіемъ вверхъ образуютъ отверстіе въ фотосферѣ, или пятно.

1) См. Описательную Астрономію М. Хандрикова, стр. 188.

Изъ всего этого можно прійти къ такому лишь заключенію, что разногласіе, существующее во мнѣніяхъ астрономовъ относительно природы солнечныхъ пятенъ, оставляетъ этотъ вопросъ въ наше время еще открытымъ. Очевидно, нѣтъ еще достаточнаго матеріала, собраннаго наблюденіями, и потому всѣ настоящія теоріи, сколько-бы въ ихъ защиту не говорилось, представляютъ собою лишь болѣе или менѣе остроумныя догадки, т е. экскурсіи въ область фантазіи.

Парабола.

Отвѣтъ на вопросъ № 11, предложенный въ № 2 В. О. Ф. и Э. М.

и тема для сотрудниковъ.

Геометрическое мѣсто точекъ, равноудаленныхъ отъ данной прямой и данной точки, образуетъ безконечно расходящуюся двумя симметричными вѣтвями кривую, называемую *параболой*.

Данная прямая MN (фиг. 31) по отношенію къ параболѣ ABC называется *дирекриссою* (направляющею), а данная точка F—*фокусомъ* параболы.

Изъ самаго опредѣленія параболы слѣдуетъ, что разстояніе какой нибудь ея точки B отъ фокуса равно ея разстоянію отъ директриссы,



т. е. BF=BD. Слѣдовательно треугольникъ FBD есть равнобедренный; поэтому параболу можно еще опредѣлить какъ геометрическое мѣсто вершины равнобедреннаго треугольника, движущагося такимъ образомъ, что одинъ конецъ основанія постоянно находится въ данной точкѣ F, а другой опирается на данную прямую MN. Прямая, перпендикулярная къ директриссѣ и проходящая черезъ фокусъ, называется *осью* параболы. Отрѣзокъ EF этой оси, т. е. разстояніе фокуса отъ директриссы называется *параметромъ*. Отъ величины этого параметра единственно зависитъ видъ параболы: чѣмъ параметръ меньше, тѣмъ болѣе парабола суживается, (т. е. обѣ ея вѣтви

ближе къ оси) наконецъ въ предѣлѣ, когда параметръ равенъ нулю, т. е. когда точка F лежитъ на прямой MN, парабола превращается въ прямую линію, перпендикулярную къ MN (т. е. обѣ ея вѣтви сливаются тогда съ осью).

Укажемъ теперь на главное свойство параболы. Мы видѣли уже, что эту кривую можно считать описанною вершиною равнобедреннаго треугольника FBD. Высота этого треугольника BH есть касательная къ параболѣ въ точкѣ B. Чтобы убѣдиться въ этомъ, предположимъ, что прямая HB пересѣкаетъ параболу еще въ какой нибудь ея точкѣ B′; тогда мы бы имѣли по предположенію FB′=DB′; слѣдовательно допущеніе, что высота треугольника HB не касается параболы, а пересѣкаетъ ее въ двухъ точкахъ, привело насъ къ невозможному равенству перпендикуляра B′D′ и наклонной B′D.—Такимъ образомъ видимъ, что касательная къ параболѣ въ какой нибудь ея точкѣ B представляетъ собою биссекторъ угла FBD, образованнаго разстояніями этой точки отъ фокуса и отъ директриссы; стало быть другимъ перпендикулярнымъ биссекторомъ смежнаго угла FBK будетъ прямая BR, такъ называемая *нормаль* параболы въ точкѣ B А такъ какъ BK, т. е. продолженіе DB, параллельна оси параболы, то отсюда видимъ, что парабола, какъ сѣченіе зеркала, имѣетъ такое свойство, что всякій лучъ свѣта, исходящій изъ фокуса F, отразится по направленію параллельному оси, и наоборотъ: всѣ лучи свѣта, направленные на параболу параллельно ея оси, соберутся въ одной точкѣ F, которая потому и названа фокусомъ. Объ этомъ оптическомъ свойствѣ параболическихъ зеркалъ, (не имѣющихъ сферической абберацiи) упоминается въ учебникахъ физики. Если-бы мы вообразили параболическое выпуклое зеркало, то нетрудно изъ вышесказаннаго заключить, что всѣ падающіе на него лучи параллельно оси EF были бы расходящимися послѣ отраженія, и ихъ мнимый фокусъ (т. е. та точка, изъ которой они казались-бы исходящими) тоже находился-бы въ F.

Построить параболу при помощи циркуля и линейки—нельзя. Можно только вычертить *по точкамъ* извѣстную опредѣленную ея часть. Для этого существуетъ много способовъ, которыхъ мы здѣсь не приводимъ, отсылая интересующихся къ курсамъ черченія, гдѣ также указаны механическіе пріемы, дающіе возможность вычертить опредѣленную часть параболы непрерывнымъ движеніемъ при помощи линейки, прямоугольнаго треугольника и гибкой нерастяжимой нити.

Въ этомъ рядѣ статей, указавъ на главныя свойства параболы, мы считаемъ болѣе важнымъ разсмотрѣть въ общихъ чертахъ примѣненіе

этого геометрическаго мѣста къ рѣшенію задачъ на построеніе и показать, какую пользу можно извлечь при употребленіи циркуля и линейки изъ такихъ кривыхъ, которыхъ мы не можемъ построить.

Прежде всего обращаемъ вниманіе на то обстоятельство, что хотя построить геометрически опредѣленной части параболы непрерывнымъ движеніемъ мы не можемъ, но очень часто имѣемъ возможность найти ея точки пересѣченія съ другими геометрическими мѣстами со всею точностью. Такъ напр. чтобы найти пересѣченіе параболы, заданной по фокусу и директриссѣ (будемъ такъ заданную параболу обозначать для краткости черезъ [F, MN]) съ прямою, параллельною директриссѣ, достаточно пересѣчь эту прямую окружностью, описанною изъ F радіусомъ равнымъ разстоянію данной прямой отъ MN. Такъ-же легко напр. найти пересѣченіе параболы [F, MN] съ прямою DK (фиг. 31), перпендикулярною къ директриссѣ: для этой цѣли достаточно соединить D съ F и изъ середины FD выставить перпендикуляръ HB до пересѣченія съ данною линіею DK. (Въ этомъ случаѣ можно получить только одну точку пересѣченія, такъ какъ другая находится на безконечности). Подобнымъ образомъ пересѣченіе параболы съ окружностью, описанною изъ F какъ изъ центра, получается проведеніемъ прямой, параллельной директриссѣ на разстояніи радіуса. И т. д. Впослѣдствіи въ другихъ задачахъ мы встрѣтимся съ другими, болѣе сложными построеніями точекъ пересѣченія параболы.

Въ задачахъ на построеніе, рѣшаемыхъ методомъ геометрическихъ мѣстъ, всегда требуется опредѣлить нѣкоторыя точки пересѣченія тѣхъ геометрическихъ мѣстъ, которыя заданы условіями задачи. Въ элементарной геометріи къ числу такихъ мѣстъ относятъ лишь окружность (циркуль) и прямую (линейка), но если изъ условій задачи вытекаетъ необходимость геометрическаго мѣста точекъ, равноудаленныхъ отъ данной прямой и отъ данной точки, т. е. параболы, то для общности метода очень полезно бываетъ *вообразить* эту параболу и уяснить себѣ какія ея точки пересѣченія требуется найти. Иногда эти точки находятся крайне просто, и вообще рѣшеніе задачи облегчается уже потому, что рѣшающій можетъ себѣ дать ясный отчетъ въ томъ, что именно подлежитъ отысканію, а также можетъ знать напередъ число возможныхъ рѣшеній.

Эти соображенія заставили насъ предпринять рядъ такихъ задачъ, статей и предлагаемыхъ вопросовъ, которые помогли-бы нашимъ читателямъ ознакомиться мало по малу съ элементарной теоріей такъ называемыхъ *коническихъ сѣченій*, съ тою спеціальною цѣлью, чтобы предоставить имъ

возможность прилагать къ задачамъ на построеніе методъ геометрическихъ мѣстъ въ большей его общности.

Познакомивъ на этотъ разъ читателей съ основнымъ свойствомъ параболы, мы приглашаемъ ихъ принять теперь участіе въ рѣшеніи нижеслѣдующихъ задачъ, изслѣдованіе которыхъ составитъ содержаніе второй статьи о параболѣ [1]).

Вопросы и задачи на элементарную теорію параболы.

№ 1. Какую кривую образуетъ геометрическое мѣсто точекъ, равноудаленныхъ отъ данной прямой и данной окружности?

№ 2. Найти пересѣченіе данной параболы съ прямою, проходящею черезъ ея фокусъ. Какая извѣстная задача рѣшается этимъ построеніемъ?

№ 3. Найти пересѣченіе двухъ данныхъ параболъ, имѣющихъ общую директриссу. Какая задача сводится на такое пересѣченіе?

№ 4. Найти пересѣченіе данной параболы съ произвольной прямой. Изслѣдованіе относящихся сюда задачъ.

№ 5. Построить окружность касательную къ данной окружности и къ данной прямой въ данной на ней точкѣ.

№ 6. Построить окружность касательную къ данной прямой и къ данной окружности въ данной на ней точкѣ.

Примѣчаніе. Изъ присланныхъ до сихъ поръ въ редакцію отвѣтовъ на вопр. № 11, предложенный въ № 2 нашего журнала, самые удовлетворительные и обстоятельные принадлежатъ: *Акимову* (изъ С.-Петерб.) и *ученику 8 кл. Харьковской I гимназіи Н. Ш.* Во второмъ изъ этихъ отвѣтовъ приведено даже доказательство, что кривая, получаемая при пересѣченіи конуса плоскостью параллельною образующей, есть геометрическое мѣсто точекъ, равноудаленныхъ отъ нѣкоторой точки, называемой фокусомъ и отъ нѣкоторой прямой, называемой директриссой. Вѣрный, но слишкомъ краткій отвѣтъ былъ еще присланъ *учен. 6 кл. Полт. реальнаго учил. В. З.*

Объ именованныхъ числахъ.

(Разъясненіе).

Вслѣдствіе полученныхъ редакціею писемъ отъ лицъ, заинтересовавшихся предложенною мною въ № 4 „Вѣстника“ темою, считаю необходимымъ сдѣлать слѣдующее дополнительное разъясненіе.

---

[1]) Эту вторую статью предполагаемъ помѣстить въ № 12 „Вѣстника“.

Въ математикѣ для того чтобы облегчить процесъ размышленія употребляются *символы*; ихъ три рода: символы *количественные*, *качественные* и *дѣйственные*. Но математика есть лишь наука о количественномъ отношеніи между величинами, качественное-же различіе между таковыми къ ея области не относится: математика не примѣнима тамъ, гдѣ при сравненіи однородныхъ величинъ мы не умѣемъ ихъ отношенія выразить количественно (какъ напр. при сравненіи различныхъ, вкусовъ, запаховъ индивидуальныхъ человѣческихъ способностей и т. д). Слѣдовательно въ чистой математикѣ (анализѣ) необходимы и достаточны только символы количественные и дѣйственные, и только въ прикладной, трактующей вообще о величинахъ конкретныхъ, а не отвлеченныхъ, мы принуждены вводить еще и символы качественные, т. е. наименованія различныхъ величинъ. При этомъ, конечно, необходимо помнить, что на эти послѣдніе символы законы математическихъ дѣйствій не распространяются (качества нельзя ни увеличить, ни уменьшить) и придавать имъ алгебраическій смыслъ точно также немыслимо, какъ и символамъ дѣйственнымъ. Никто напр. не сомнѣвается, что значекъ $+$ нельзя *умножить* на другой значекъ $+$, и что понятіе *плюсъ въ квадратѣ* не имѣетъ никакого смысла, а между тѣмъ не мало времени тратится на различныя разсужденія объ умноженіи, дѣленіи и пр именованныхъ чиселъ и въ результатѣ сущность этого вопроса все таки остается не выясненной, и учащіеся очень плохо понимаютъ почему напр. *футъ въ квадратѣ* не такая-же нелѣпость какъ *фунтъ въ квадратѣ*.

Пытаться разъяснить различіе между символами количественными и качественными при преподаваніи ариѳметики, повторяемъ, считаемъ несвоевременнымъ. За то въ курсѣ алгебры насъ всегда поражало отсутствіе отдѣла, посвященнаго ознакомленію учащихся съ математической символистикой, и полное игнорированіе символовъ качественныхъ въ текстѣ рядомъ съ постояннымъ ихъ употребленіемъ въ задачахъ. Конечно алгебра, какъ элементарная часть математическаго анализа, имѣетъ дѣло лишь съ количественными символами, употребляя символы дѣйственные (значки дѣйствій) для облегченія разсужденій, но въ задачахъ, рѣшаемыхъ учащимся для лучшаго усвоенія алгебраическихъ дѣйствій, онъ переходитъ чаще всего уже въ область прикладной математики, которая, какъ было сказано, не можетъ обходиться безъ наименованій. Въ виду этого мы и предложили сотрудникамъ, желающимъ пополнить этотъ пробѣлъ, написать недостающую главу къ гимназическому курсу алгебры и изложить въ ней тѣ условные законы, которымъ подчиняются символы количественные въ чистой, и символы качественные въ прикладной математикѣ. *Эр. Шпачинскій.*

Вопросы и задачи.

№. 53. Что слѣдуетъ понимать подъ *абсолютнымъ нулемъ температуры?*

NB. Отвѣтъ требуется обстоятельный.

№ 54. Какая существуетъ аналогія между динамическимъ электричествомъ и теченіемъ жидкости?

№ 55. Опредѣлить въ цѣлыхъ числахъ стороны прямоугольнаго треугольника, котораго площадь и периметръ выражаются однимъ и тѣмъже числомъ.

(Н. Соболевскій).

№ 56. Построить треугольникъ по даннымъ: высотѣ, радіусу круга описаннаго и разности угловъ при основаніи.

(Учен. I Харьк. гимн. Н. Ш.)

№ 57. Рѣшить уравненіе $x^3-3x-2=0$.

(Учен. Немир. гимн. I. Г—бъ.

№ 58. Въ нѣкоторомъ обществѣ, состоящемъ изъ 10 членовъ, собиралась подписка съ благотворительною цѣлью. Одинъ изъ участвующихъ въ ней, господинъ А, заявилъ, что внесетъ половину того, что будетъ внесено всѣми остальными; другой, В, независимо отъ этого, тоже обѣщалъ внести треть того, что внесутъ всѣ остальные, и наконецъ С далъ слово внести сумму, составляющую четверть всѣхъ остальныхъ взносовъ. Остальные семь членовъ общества внесли вмѣстѣ 195 рублей, но лицо, собирающее деньги, оказалось въ довольно затруднительномъ положеніи, такъ какъ каждый изъ трехъ господъ А, В и С желалъ быть послѣднимъ въ уплатѣ обѣщанныхъ денегъ, а вычислить ихъ взносы помимо этого никто не сумѣлъ. Не угодно-ли имъ помочь?

№ 59. Не употребляя циркуля, опустить при помощи линейки перпендикуляръ изъ данной точки на данную прямую, проходящую черезъ центръ даннаго круга.

(Студ. Кіевск. Унив. С. Н. Гирманъ).

№ 60. Опредѣлить p и q такъ, чтобы трехчленъ

$$x^2 + px + q$$

для всѣхъ значеній x, заключенныхъ между двумя данными предѣлами a и b, наименьше уклонялся отъ нуля, т. е. чтобы наибольшая абсолютная величина была возможно малою.

В. П. Ермаковъ.

NB. По поводу этой задачи рекомендуемъ читателямъ довольно распространенный мемуаръ (имѣющійся въ отдѣльной продажѣ) проф. П. Л. Чебышева о функціяхъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля.

Рѣшенія задачъ.

Рѣшеніе задачи № 15 не въ очередь, предложенной въ № 13 Журн. Элем. Мат. за 188⁵/₆ г. на стр. 307.

Найти общее выраженіе двухъ раціональныхъ чиселъ x и y, удовлетворяющихъ уравненію

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

Эта задача въ общемъ случаѣ не рѣшается элементарными пріемами. Но если извѣстно одно раціональное рѣшеніе, т. е. если даны два раціональныя числа, удовлетворяющія уравненію, то задача имѣетъ безчисленное множество раціональныхъ рѣшеній, общее выраженіе которыхъ легко найти. Такъ, пусть

$$x=\alpha, \qquad y=\beta$$

будетъ раціональное рѣшеніе уравненія (1). Полагая

$$x=\alpha+mX, \qquad y=\beta+mY,$$

подставляя въ уравненіе (1) и замѣчая, что

$$a\alpha^2+b\alpha\beta+c\beta^2+d\alpha+e\beta+f=0,$$

получаемъ

$$(aX^2+bXY+cY^2)m^2+(d'X+e'Y)m=0, \qquad (2)$$

гдѣ

$$d'=2a\alpha+b\beta+d,$$

$$e'=b\alpha+2c\beta+e.$$

Изъ уравненія (2) находимъ

$$m=0, \text{ и } m=-\frac{d'X+e'У}{aX^2+bXУ+cУ^2},$$

слѣдовательно общія выраженія раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) будутъ

$$x=\alpha-\frac{d'X^2+e'XУ}{aX^2+bXУ+cУ^2}, \quad (3)$$

$$y=\beta-\frac{d'XУ+e'У^2}{aX^2+bXУ+cУ^2}, \quad (4)$$

если подъ X и У будемъ подразумѣвать какія угодно раціональныя числа.

Для симметріи мы ввели два новыя перемѣнныя X и У, но легко видѣть, что одно изъ нихъ можно положить равнымъ произвольному постоянному раціональному числу, нисколько не теряя въ общности выраженій (3) и (4).

Найти непосредственно раціональное рѣшеніе уравненія (1) мы можемъ только въ рѣдкихъ случаяхъ. Именно, если лѣвая часть уравненія (1) равна суммѣ двухъ многочленовъ, которые, будучи приравнены нулю, даютъ два совмѣстныя уравненія, рѣшающіяся раціонально, тогда ихъ рѣшенія удовлетворяютъ уравненію (1).

Такъ, напримѣръ, если трехчленъ

$$ax^2+bxy+cy^2$$

разлагается на раціональные множители, то уравненія

$$ax^2+bxy+cy^2=0,$$

$$dx+ey+f=0$$

рѣшаются раціонально и ихъ рѣшенія удовлетворяютъ также уравненію (1).

Подобнымъ-же образомъ мы можемъ найти раціональныя рѣшенія уравненія (1), если какой либо изъ трехчленовъ

$$ax^2+dx+f=0,$$

$$cy^2+ey+f=0$$

разлагается на раціональные множители.

Предыдущее можно обобщить и на случай квадратнаго уравненія со многими перемѣнными.

Такъ, напримѣръ, если имѣемъ уравненіе

$$ax^2+by^2+cz^2+a_1yz+b_1zx+c_1xy+a_2x+b_2y+c_2z+d=0 \qquad (5)$$

и если намъ извѣстно раціональное рѣшеніе его

$$x=\alpha, \quad y=\beta, \quad z=\gamma,$$

то, полагая

$$x=\alpha+mX, \qquad y=\beta+mY, \qquad z=\gamma+Z, \qquad (6)$$

получимъ для опредѣленія m уравненіе

$$(aX^2+bY^2+cZ^2+a_1YZ+b_1ZX+c_1XY)m^2+(a'X+b'Y+c'Z)m=0,$$

гдѣ a' b' c' не зависятъ отъ m, X, У, Z. Подставляя въ равенства (6) найденное такимъ образомъ значеніе m, получимъ общее выраженіе раціональныхъ рѣшеній уравненія (5), если подъ X, У, Z будемъ подразумѣвать произвольныя числа, при чемъ, нисколько не теряя въ общности выраженій для x, y, z, можно положить одно изъ перемѣнныхъ X, У, Z равнымъ произвольному постоянному раціональному числу.

Если лѣвая часть уравненія (5) равна суммѣ трехъ многочленовъ которые, будучи приравнены нулю, даютъ три совмѣстныя уравненія, рѣшающіяся раціонально, то ихъ рѣшенія удовлетворяютъ также уравненію (5).

Такъ, напримѣръ, если трехчленъ

$$ax^2+c_1xy+by^2$$

разлагается на раціональные множители, то рѣшенія совмѣстныхъ уравненій

$$ax^2+c_1xy+by^2=0,$$

$$cz^2+a_1yz+b_1zx=0.$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d=0,$$

сумма лѣвыхъ частей которыхъ равна лѣвой части уравненія (5), будутъ раціональны и удовлетворятъ уравненію (5).

Если приложимъ предыдущую теорію къ уравненію

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

то найдемъ, что оно удовлетворяется между прочимъ для

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 1,$$

и общее выраженіе его раціональныхъ рѣшеній поэтому будетъ

$$x = \frac{2X}{X^2+У^2+1},$$

$$y = \frac{2У}{X^2+У^2+1},$$

$$z = \frac{X^2+У^2-1}{X^2+У^2+1},$$

гдѣ X и У какія угодно раціональныя числа. Для простоты мы положили

$$Z = -1.$$

Если $X=1$, $У=1$, то $x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{1}{3}$.

„ $X=0$, $У=2$, „ $x=0, y = \frac{4}{5}, z = \frac{3}{5}$.

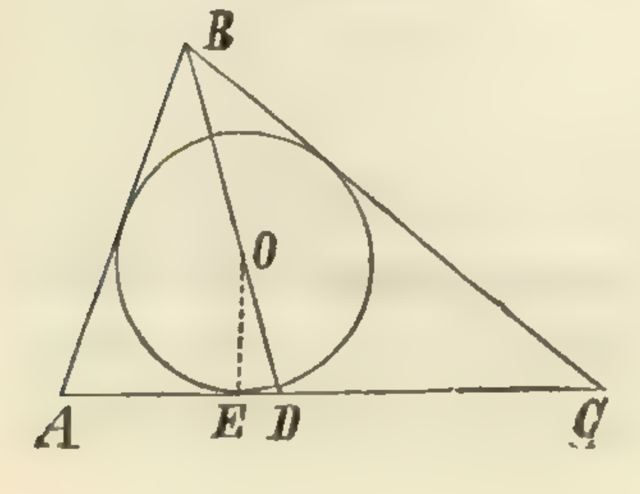
И т. д.

Студ. Кіевск. Унив. С. Н. Гирманъ.

№ 8. Построить треугольникъ по биссектору угла при вершинѣ, радіусу круга вписаннаго и разности угловъ при основаніи.

Начертивъ даннымъ радіусомъ окружность, проводимъ въ ней произвольный радіусъ OE (фиг 32), черезъ точку E проводимъ касательную и при точкѣ O строимъ $\angle EOD$, равный половинѣ данной разности угловъ A и C. Продолжимъ DO и отложимъ DB=данному биссектору; наконецъ изъ точки B проведемъ двѣ касательныя къ кругу BA и BC до пересѣченія съ касательною AC. Треугольникъ ABC будетъ требуемый.

Фиг. 32.



Что уголъ EOD, который обозначимъ че-

резъ α, долженъ дѣйствительно составлять половину разности угловъ при основаніи A и C, это легко видѣть изъ того, что

$$A-C=\angle BDC-\angle BDA,$$

но $\angle BDC=90°+\alpha$, а $\angle BDA=90°-\alpha$; отсюда

$$\alpha=\frac{A-C}{2}.$$

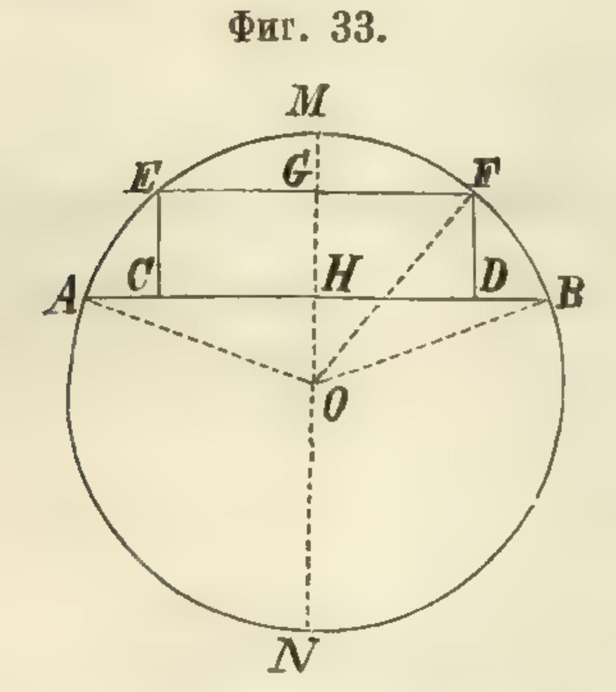
Задача возможна, лишь при условіи: $l>r(1+\mathrm{Sec}\alpha)$, гдѣ l есть данный биссекторъ, а r—данный радіусъ.

(М. Панченко, В. Долгинцевъ. Учен.: 6 кл. Тульск. г. Н. И., 7 кл. Нем. г. И. Г—чъ и І. Г—бъ, 8 кл. Екатериносл. г. В. К.)

NB. Построенія учениковъ И. Г—ча и І. Г—ба слишкомъ сложны и потому неудобны.

№ 10. Въ данный сегментъ вписать прямоугольникъ наибольшей площади.

Фиг. 33.



Пусть въ данный сегментъ AMB (фиг. 33) вписанъ требуемый прямоугольникъ CEFD. Обозначимъ для краткости:

$$OF=r;\ OH=a;\ OG=x;\ GF=y.$$

Площадь искомаго прямоугольника P выразится произведеніемъ

$$P=2(x-a)y;$$

она достигаетъ maximum при томъ-же условіи, при которомъ и половина ея $(x-a)y$ достигаетъ наибольшей величины; условіе-же maximum произведенія $(x-a)y$ будетъ также условіемъ наибольшаго значенія квадрата этого произведенія $(x-a)^2\,y^2$, которое можно представить, на основаніи зависимости между x, y и r, въ такомъ видѣ

$$(x-a)(x-a)(r+x)(r-x). \qquad (1)$$

Мы знаемъ изъ теоріи maximum и minimum, что произведеніе множителей, сумма которыхъ постоянна, достигаетъ наибольшаго значенія въ случаѣ равенства всѣхъ множителей. Но въ произведеніи (1) сумма множителей не остается постоянною, поэтому чтобы воспользоваться вышеприве-

денной теоремой, постараемся прежде достигнуть этого постоянства суммы. Вообразимъ для этой цѣли два неопредѣленные коэффиціента α и β, имѣющіе такое свойство, что при умноженіи на нихъ двухъ послѣднихъ (неравныхъ) множителей $(r+x)$ и $(r-x)$ сумма всѣхъ четырехъ множителей произведенія дѣлается постоянною, т. е. сумма

$$(x-a)+(x-a)+\alpha(r+x)+\beta(r-x), \qquad (2)$$

или все равно

$$(\alpha-\beta+2)x+\alpha r+\beta r-2a$$

дѣлается величиною постоянною; это очевидно возможно лишь въ томъ случаѣ, когда эта сумма не содержитъ члена перемѣннаго, т. е. когда коэффиціентъ при x равенъ нулю Слѣдовательно, при условіи

$$\alpha-\beta+2=0 \qquad (3)$$

сумма множителей (2) остается постоянной, и тогда условіе для maximum ихъ произведенія выразится равенствами:

$$(x-a)=\alpha(r+x)=\beta(r-x). \qquad (4)$$

Итакъ. хотя мы ввели два новыя неизвѣстныя α и β, но имѣемъ теперь изъ (3) и (4) три совмѣстныя уравненія

$$\begin{aligned} \alpha-\beta+2&=0, \\ \alpha(r+x)&=x-a, \qquad (5) \\ \beta(r-x)&=x-a, \end{aligned}$$

которыхъ совершенно достаточно для опредѣленія α, β и x, удовлетворяющихъ наибольшему значенію разсматриваемой площади. Исключивъ на самомъ дѣлѣ α и β изъ уравненій (5), легко находимъ

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+8r^2}}{4}. \qquad (6)$$

Знакъ $+$ соотвѣтствуетъ прямоугольнику вписанному въ данный сегментъ AMC, а знакъ $-$ прямоугольнику вписанному въ дополнительный сегментъ ANB. Выраженіе (6) не трудно построить на основаніи обыкновенныхъ пріемовъ приложенія алгебры къ геометріи.

Условіе возможности задачи сводится къ тому, чтобы x было меньше r, т. е.

$$a \pm \sqrt{a^2+8r^2} < 4r,$$

это-же неравенство приводитъ къ условію

$$a < r,$$

которое всегда имѣетъ мѣсто. Задача, слѣдовательно, всегда возможна.

Въ частномъ случаѣ когда $a=0$, имѣемъ изъ (6)

$$x = \frac{\pm\sqrt{8r^2}}{4} = \frac{\pm r\sqrt{2}}{2},$$

т. е. когда сегментъ равенъ полукругу, вписанный въ него прямоугольникъ наибольшей площади составляетъ половину вписаннаго въ цѣлый кругъ квадрата.

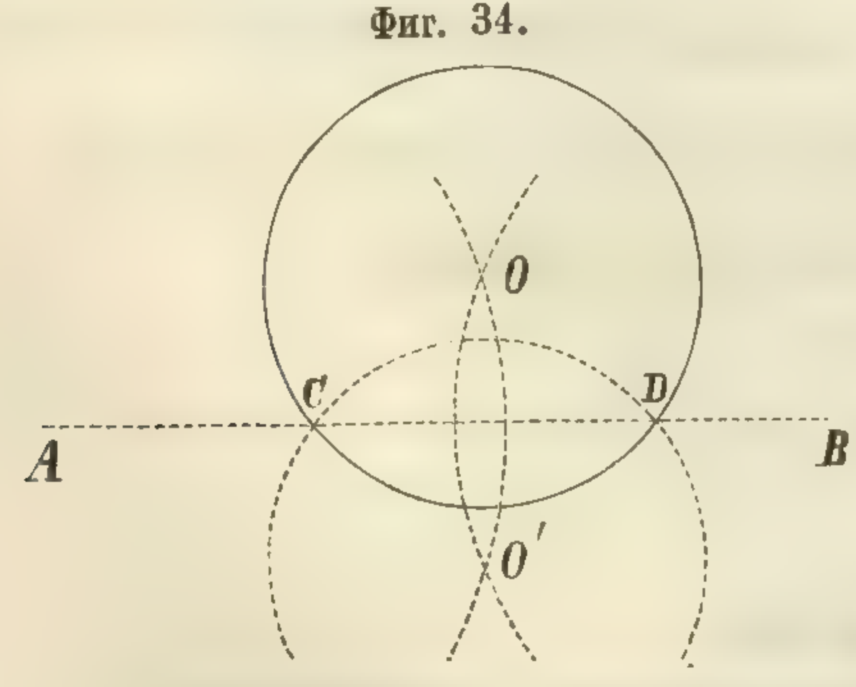
(Учит. Динаб. р. уч. А. Н. Ширяевъ).

NB. Можно было-бы принять здѣсь за основное неизвѣстное y, т. е. половину основанія искомаго прямоугольника, но тогда получилась-бы очень сложная формула, которую неудобно строить.

Обращаемъ вниманіе на рѣшеніе этой задачи главнымъ образомъ потому, что употребленный здѣсь способъ нахожденія maximum можетъ имѣть примѣненіе въ рѣшеніи многихъ подобныхъ вопросовъ.

№ 15. Не употребляя линейки, найти при помощи циркуля пересѣченіе данной окружности съ прямою, которая должна проходить черезъ двѣ данныя точки.

Фиг. 34.



Пусть O есть центръ данной окружности (фиг. 34); изъ данныхъ точекъ A и B зачерчиваемъ дуги радіусами, соотвѣтственно равными AO и BO. Изъ точки пересѣченія этихъ дугъ O' радіусомъ равнымъ радіусу данной окружности, описываетъ симметричную окружность; она пересѣчетъ данную въ искомыхъ точкахъ C и D.

Доказательство — предоставляемъ самому читателю.

(Машлыкинъ, Стойковъ. Учен.: 7 кл. Кіевск. кад. корп. А. Н—въ и Е. М—а, 8 кл. Харьк. I г. Н. Ш.)

№ 17. Найти предѣлъ, къ которому стремится произведеніе

$$1^{1/2} . 2^{1/4} . 4^{1/8} . 8^{1/16} . 16^{1/32} \ldots$$

при увеличеніи числа множителей до безконечности.

Пренебрегая множителемъ единицею, можно это произведеніе написать:

$$2^{1/4} . 2^{2/8} . 2^{3/16} . 2^{4/32} \ldots$$

или:

$$2^{1/4 + 2/8 + 3/16 + 4/32 + \cdots}$$

Прогрессію, составляющую экспонентъ, можно разбить на безконечное число слѣдующихъ прогрессій.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{4}$$

$$+ \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{8}$$

и т. д. А такъ какъ суммы этихъ прогрессій составляютъ, какъ видимъ, сами геометрическую прогрессію, то данное произведеніе напишется

$$2^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots},$$

что при безконечномъ увеличеніи числа членовъ даетъ въ предѣлѣ 2^1, т. е. 2.

(Учен.: 7 кл. Кіевск. кад. корп. Е. М—а, 8 кл. Немир. г. Ш. Г.)

NB. Было прислано еще одно ошибочное рѣшеніе (изъ Харькова).

Смѣсь.

Юлій Дюбоскъ, знаменитый механикъ и оптикъ, физическіе приборы котораго пользовались европейскою извѣстностью, умеръ 12 Сентября.

Скорость свѣта по послѣднимъ экспериментальнымъ изслѣдованіямъ, предпринятымъ въ Америкѣ С. Ньюкомбомъ (1880—1882 г.), опредѣлена въ 299860 км. въ секунду.

Скорость звука въ стеклѣ, по изслѣдованіямъ Троубриджа и Макъ-Рея составляетъ 2900 м. въ секунду, т. е. почти въ 9 разъ больше чѣмъ въ воздухѣ.

Опытъ Гр. Бэлля съ телефономъ. Если концы проволокъ, идущихъ отъ источника прерывнаго тока (напр. отъ гальванической батареи, въ цѣпь которой введенъ прерыватель) погрузить въ широкій сосудъ съ водою, и если туда-же погружены концы проволокъ телефона, хотя бы и на значительномъ разстояніи, то прерываніе тока будетъ слышно отчетливо въ телефонъ, (лишь бы только концы проволокъ послѣдняго не были расположены на эквипотенціальной линіи). Опытъ этотъ удается даже при погруженіи концовъ въ рѣку или озеро.

Отвѣты редакціи.

Ф. К. С. (Плоцкъ). Выводъ формулъ для $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\cos(\alpha \pm \beta)$, предложенный Вами, очень хорошъ и практикуется часто при преподаваніи тригонометріи. Но онъ помѣщенъ и въ учебникахъ (напр. въ прям. тригонометріи Е. Гедройцъ-Юраго) и потому повторять его на страницахъ „Вѣстника“ нѣтъ особенной надобности. Притомъ-же выводъ основной формулы для $\sin(\alpha + \beta)$, помѣщенный въ Сентябрской книжкѣ Педагогическаго Сборника (см. № 7 „Вѣстника“ стр. 153), болѣе простъ и отнимаетъ у учениковъ меньше времени. А это—главное условіе. Если Вы остаетесь при желаніи написать отвѣтъ на предложенную тему объ именованныхъ числахъ, просимъ прочесть помѣщаемое въ этомъ номерѣ дополнительное разъясненіе.

В. Долгинцеву. Мы не считаемъ удобнымъ помѣщать предлагаемую Вами теорему, ибо она слишкомъ хорошо извѣстна и неоднократно встрѣчается при рѣшеніи задачъ.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Каталогъ спеціальныхъ журналовъ

за 1886 г.

съ указаніемъ ихъ приблизительной годовой цѣны.

Б. Нѣмецкіе.

(Продолженіе).

Jsis Zeitschr. f. naturwiss. Liebhabereien *(Russ)* . .	52	№№	7,00	руб.
Kosmos *(Vetter)*	12	„	12,00	„
Kunstgewerbeblatt *(Pabst)* (съ октября)	12	„	6,50	„
Kunst u. Gewerbe *(Stockbauer)*	24	„	5,50	„
Künste, die graphischen *(Berggruen)* (съ октября) . .	4	„	16,00	„
Laterna magica *(Liesegang)*	4	„	2,00	„
Liebig's Annalen d. Chemie *(Kopp, Hofmann* u. *A.)* .	4	„	12,00	„
Leopoldina. *(Knoblauch)*	15	„	4,50	„
Lithographia *(Isermann)*	48	„	5,00	„
Lotos *(Lippich* u. *Mayer)*	1	„	2,00	„
Magazin f. Lehr-u. Lernmittel aller Länder *(Schröder)* .	24	„	2,50	„
Magazin f. Pädagogik *(Kaisser* u. *Keller)*	52	„	3,50	„
Metallarbeiter. *(Pataky)*	52	„	8,00	„
Mittheilungen mathem. u. naturwiss. a. d. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin	10	„	4,50	„
Mittheilungen math.-naturw. d. math. Section d. württemb. Reallehrerverbandes *(Böklen)* кажд. т.	—	„	1,00	„
Mittheilungen d. naturforsch. Gesellschaft in Bern . .	—	„	1,00	„
Mittheilungen monatl. d. naturwiss. Vereins d. Regbz. Frankfurt a. O. *(Huth)*	12	„	2,00	„
Mittheilungen a. d. naturwiss. Vereine v. Neu-Vorpomm. u. Rügen in Greifswald *(Marsson)* кажд. т. . .	—	„	2,00	„
Mittheilungen d. schweizer. entomolog. Gesellschaft *(Stierlin)* кажд. т.	—	„	2,00	„
Mittheilungen d. ornithol. Vereins in Wien *(Hayek)* .	52	„	7,00	„
Mittheilungen aus d. zoolog. Station zu Neapel . . .	4	„	12,00	„
Mittheilungen geologische *(Inckey* u. *Schmidt)* . . .	12	„	5,00	„

(Продолженіе слѣдуетъ).

ОБЪЯВЛЕНІЯ.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 7 Ноября 1886 года.

Тип. Е. Т. Кереръ, арендуемая Н. Пилющенко и С. Бродовскимъ.